Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck I

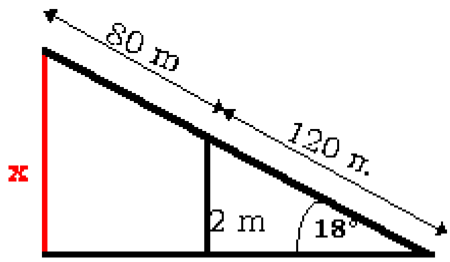
Sinus

Im rechtwinkligen Dreieck heißt die Seite, die einem spitzen Winkel gegenüberliegt, Gegenkathete des Winkels. Das Verhältnis Gegenkathete zu Hypotenuse hängt nur von der Größe des Winkels ab. Dieses Verhältnis nennt man auch Sinus des Winkels.

$$\text{Sinus} = \frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Hypotenuse}}$$

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $\sin \beta = \frac{b}{c}$

Mit Hilfe eines Strahlensatzes oder der zentrischen Streckung kann der Sinus begründet werden.
Beispiel: Berechne die Länge der Seite x, wenn folgende Strecken gegeben sind:



Es gilt: (Strahlensatz)

$2 : 120 = x : 200 \quad | \cdot 200$

$400 : 120 = x$

$x = 3\frac{1}{3}$

Das Ergebnis für x ist $3\frac{1}{3}$ m.

Trigonometrie
im rechtwinkligen Dreieck II

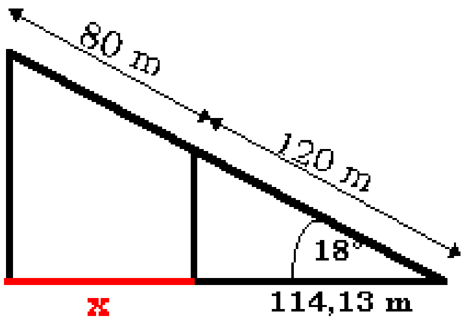
Kosinus

Im rechtwinkligen Dreieck wird ein spitzer Winkel von einer Kathete, seiner Ankathete und der Hypotenuse eingeschlossen.
Das Verhältnis Ankathete zu Hypotenuse hängt nur von der Größe des Winkels ab. Dieses Verhältnis nennt man auch Kosinus des Winkels.

$$\text{Kosinus} = \frac{\textit{Ankathete}}{\textit{Hypotenuse}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad\qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

Mit Hilfe eines Strahlensatzes oder der zentrischen Streckung kann der Kosinus begründet werden.
Beispiel: Berechne die Länge der Seite x, wenn folgende Stecken gegeben sind:



Es gilt: (Strahlensatz)

114,13 : 120 =(x+114,13):200 |·200
(114,13 : 120)· 200 = x
x = 76,09

Das Ergebnis für x ist 76,09 m.

Trigonometrie
im rechtwinkligen Dreieck III

Tangens und Kotangens

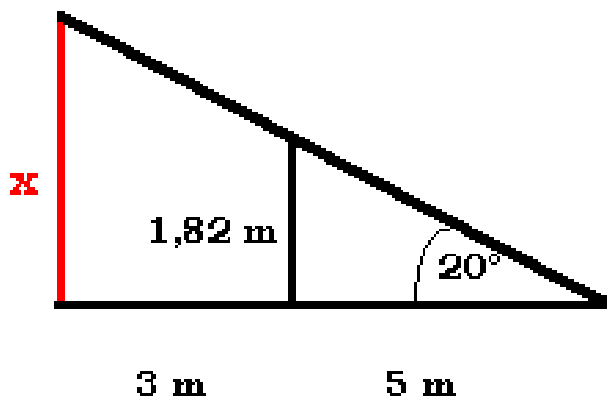
Im rechtwinkligen Dreieck hängt das Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete nur vom Winkel ab.
Das Verhältnis Gegenkathete zu Ankathete nennt man auch Tangens des Winkels.

<u>Tangens</u> = $\frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Ankathete}}$ $\quad$ tan $\alpha = \frac{a}{b}$ $\quad$ tan $\beta = \frac{b}{a}$

Im rechtwinkligen Dreieck hängt das Verhältnis von Ankathete zu Gegenkathete nur vom Winkel ab.
Das Verhältnis von zu Gegenkathete nennt man auch Kotangens des Winkels.

<u>Kotangens</u> = $\frac{\textit{Ankathete}}{\textit{Gegenkathete}}$ cot $\alpha = \frac{b}{a}$ $\quad$ cot $\beta = \frac{a}{b}$

Mit Hilfe eines Strahlensatzes oder der zentrischen Streckung kann der Tangens und Kotangens begründet werden.
<u>Beispiel</u>: Berechne die Länge der Seite x, wenn folgende Strecken gegeben sind:



Es gilt: (Strahlensatz)
<u>Tangens</u>
1,82 : 5 = x : 8 |·8
1,82 : 5 · 8·= x
x = 2,912
<u>Kotangens</u>
Entsprechend gilt umgekehrt:
5 : 1,82 = 8 : x

Das Ergebnis für x ist 2,912 m.

Trigonometrie
im rechtwinkligen Dreieck IV

Sinussatz

In jedem Dreieck verhalten sich die Längen zweier Seiten zueinander wie die Sinuswerte der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkeln.

Sinussatz (für beliebige Dreiecke):

$$\frac{a}{b} = \frac{sin\alpha}{sin\beta} \qquad \frac{a}{c} = \frac{sin\alpha}{sin\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{sin\beta}{sin\gamma}$$ und sin α = sin (180°- α)

Anmerkung: Wenn in einem Dreieck zwei Seitenlängen und der Gegenwinkel der kürzeren Seite gegeben sind (SSW), dann ist das Ergebnis für den anderen Gegenwinkel nicht eindeutig.

Kosinussatz

Der Kosinussatz ist eine Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras. Man muss hier von der Summe der Quadrate der Seitenlängen das doppelte Produkt aus diesen Seitenlängen und dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels abziehen.

Ist der Winkel gleich 90°, gilt der Satz des Pythagoras, weil cos 90° = 0.

Kosinussatz (für beliebige Dreiecke):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Ebenso gilt: (umgeformt)

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \qquad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \qquad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$